به نام خدا

ریاضی عمومی ۱
پاییز ۹۵-۹۴

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

فصل دوم-خواص توابع پیوسته

در این کاربرگ به بررسی چند قضیه مهم در مورد توابع پیوسته می‌پردازیم.

فعالیت ۱ (قضیه مقدار بینی)**.** درست است که با یکی دو مثال در کاربرگ پیش، خواستیم نشان دهیم که تعریف پیوستگی با شهود ما از پیوستگی متفاوت است، اما قضیه زیر می‌گوید تعریف پیوستگی چندان هم دور از شهود ما از پیوستگی توابع نیست!

قضیه ۱ (مقدار بینی)**.** فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد، $f(a)=A$ و $f(b)=B$. در این صورت، به ازای هر عدد حقیقی بین A و B، مانند C، نقطه‌ای در بازه $[a,b]$ مانند c وجود دارد که $f(c)=C$.

الف) با استفاده از قضیه مقدار بینی، نشان دهید که معادله $\sin x - x^{۲} + x + ۳ = ۰$ دست‌کم دو ریشه در بازه $[-\pi,\pi]$ دارد.

ب) با توجه به قضیه مقدار بینی، آیا اگر $A<B$ و یا $B<A$ باشد، می‌توان نتیجه گرفت که برد تابع بازه بسته $[A,B]$ و یا $[B,A]$ است؟ اگر نه تحت چه شرایطی حکم برقرار می‌شود؟

ج) فرض کنید تابع $f:[a,b]\to[a,b]$ پیوسته باشد. نشان دهید نقطه‌ای در $[a,b]$ مانند c وجود دارد که $f(c)=c$.

راهنمایی: تابع $g(x)=x-f(x)$ را در نظر بگیرید.

د) برای اثبات قضیه مقدار بینی، ابتدا فرض کنید $a=۰$، $b=۱$، $A<۰$، $B>۰$ و $C=۰$. حال با روش نصف کردن بازه‌ها، دنباله‌ای از بازه‌های بسته تودرتویی بیابید که طول آنها به صفر میل کند.

ه) طبق اصل تمامیت، اشتراک تمام بازه‌های قسمت (ج) یک نقطه است. نشان دهید که مقدار تابع در آن نقطه برابر با صفر است.

راهنمایی: با برهان خلف فرض کنید مقدار تابع برابر با صفر نیست، حال از پیوستگی تابع استفاده کنید و به تناقض برسید. همچنین توجه کنید که مقدار تابع در نقاط ابتدایی این بازه‌ها منفی و در نقاط انتهایی مثبت هستند.

و) با یک انتقال و تغییر متغیر، قضیه مقدار بینی را در حالت کلی ثابت کنید.

راهنمایی: $g(x)=f\left((b-a)x+a\right)-C$.

فعالیت ۲ (پیوستگی تابع وارون).

الف) تابع $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = x^n$ تعریف می‌کنیم که در آن n یک عدد طبیعی است. می‌دانیم این تابع یک‌به‌یک، پیوسته و صعودی اکید است. دامنه و برد آن را بدست آورید. همچنین نمودار آن و وارونش را رسم کنید.

فرض کنید I یک بازه و $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و یک به یک باشد.

ب) نشان دهید از دو حالت زیر یکی هست که برای هر نقطه درونی x_0 از I اتفاق می‌افتد:

۱) به ازای هر x که $x > x_0$، $f(x) > f(x_0)$ و به ازای هر x که $x < x_0$، $f(x) < f(x_0)$.

۲) به ازای هر x که $x > x_0$، $f(x) < f(x_0)$ و به ازای هر x که $x < x_0$، $f(x) > f(x_0)$.

ج) نشان دهید که اگر حالت ۱ در قسمت (الف) اتفاق افتد، آنگاه تابع صعودی اکید و اگر حالت ۲ اتفاق افتد تابع نزولی اکید است.

د) فرض کنید f صعودی اکید باشد (همه چیز در مورد نزولی اکید قابل تکرار است). نشان دهید
$$J = \{f(x) : x \in I\}$$
یک بازه است؛ یعنی اگر y_1 و y_2 در J باشند، آنگاه به ازای هر y که $y_1 < y < y_2$، y متعلق به J است.

ه) نشان دهید که اگر y_0 یک نقطه درونی J باشد، آنگاه x_0 که $y_0 = f(x_0)$، یک نقطه درونی I است.

و) ثابت کنید f^{-1} روی J پیوسته است.

فعالیت ۳ (توابع پیوسته روی بازه بسته). در این فعالیت سعی خواهیم کرد که نقاط اکسترمم (ماکسیمم یا مینیمم) توابع پیوسته را بررسی کنیم. در آخر تنها به صورت قضیه اصلی در این بخش اشاره کرده و آن را اثبات نخواهیم کرد. قبل از شروع فعالیت خوب است که تعریف نقطه ماکسیمم و مینیمم را یادآوری کنیم.

تعریف ۲. تابع $f : S \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. نقطه x_0 از S را یک نقطه ماکسیمم تابع f می‌نامیم، به شرطی که به ازای هر x در S، $f(x_0) \geq f(x)$. به همین ترتیب، نقطه x_0 از S را یک نقطه مینیمم تابع f می‌نامیم، به شرطی که به ازای هر x در S، $f(x_0) \leq f(x)$. در حالت اول $f(x_0)$ را ماکسیمم تابع f روی S و در حالت دوم، $f(x_0)$ را مینیمم تابع f روی S می‌نامیم.

الف) آیا تابع پیوسته‌ای روی $\mathbb{R}$ وجود دارد که ماکسیمم و مینیمم نداشته باشد؟

ب) آیا تابع پیوسته‌ای روی $\mathbb{R}$ وجود دارد که ماکسیمم و مینیمم داشته باشد؟

ج) آیا تابع پیوسته‌ای روی $\mathbb{R}$ وجود دارد که ماکسیمم داشته باشد ولی مینیمم نداشته باشد؟

د) آیا تابع پیوسته ای روی بازه باز $(۰, ۱)$ می‌توان یافت که ماکیسمم نداشته باشد؟

ه) آیا تابع پیوسته‌ای روی بازه باز $(۰, ۱)$ هست که ماکسیمم داشته باشد؟

و) آیا تابع ناپیوسته‌ای می‌توان یافت که روی بازه $[۰, ۱]$ ماکسیمم نداشته باشد؟

ز) آیا تابع پیوسته‌ای می‌توان یافت که روی بازه $[۰, ۱]$ ماکسیمم نداشته باشد؟

راهنمایی: به قضیه زیر توجه کنید!

قضیه ۳. هر تابع پیوسته مانند $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ روی $[a, b]$ نقطه ماکسیمم و مینیمم دارد.